 Prof. : Mohamed CH-CHAOUI

TD: III

1 Intégrales généralisées

Exercice 1 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto e^{-t}$ est convergente sur $[0, +\infty[$ et que l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$

Exercice 2 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est convergente sur $[0, +\infty[$ et que l'integrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\, dt = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est divergente sur $]0, 1]$.

Exercice 4 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \sin(t)$ est divergente sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente sur $]-1, 1[$ et $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \pi$.

Exercice 6 Soit λ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\, dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.

Exercice 7 Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l'$

1. Existence et calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\, dt$
2. Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt$

Exercice 8 Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9 Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 10 Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(t^2)}{t^2}\, dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 11 Prouver la convergence et calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$

Exercice 12 Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^n - 1}\, dt$

Exercice 13 Nature $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}}\, dt$

Exercice 14 Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty$ telle que la fonction $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ soit bornée. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$

Exercice 15

1. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx = 0.$$
2. Montrer que l'application f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$
4. On pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
5. Déduire de ce qui précède que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 16 Étudier la nature des intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \int_1^{+\infty} \arctan(\frac{1}{t})\,dt \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-1/t} - \cos(\frac{1}{t})\right)dt$$